Examen Final de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas Grupo B
8 de julio de 2003

1. Sea $f(z) = \log(z-i)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

   a) Estudiar la continuidad y la holomorfía de f

   b) Obtener la serie de Taylor de f centrada en $z_o = -1-i$ y hallar su radio de convergencia. ¿En qué disco centrado en $-1-i$ coinciden f y la suma de la serie de Taylor obtenida?

2. Sea f una función entera no constante. Dado $w \in \mathbb{C}$, justifíquese que se cumple alguna de las dos siguientes afirmaciones:

   a) La ecuación $f(z) = w$ tiene solución.

   b) Existe una sucesión $\{z_n\} \to \infty$ tal que $\{f(z_n)\} \to w$.

3. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{z^2 \log z}{1+z^4}$ a lo largo de la frontera de la parte del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, ($0 < \varepsilon < 1 < R$), contenida en el primer cuadrante, calcular las integrales:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \log x}{1+x^4}\, dx \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$$

4. Describir las funciones holomorfas en el disco unidad que verifican las condiciones $f(0) = 1$, $|f'(0)| = 2$ y $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in D(0,1)$.

5. Probar que el polinomio $z^6 - z^3 - 4z + 6$ no tiene raíces en el disco unidad y calcular el número de ceros de dicho polinomio en el semiplano de la derecha.

Teoría Elegir uno de los siguientes temas:

a) Ceros de una función holomorfa. Principio de identidad.

b) Teorema de Rouché.